

Dođu Akdeniz Üniversitesi
Matematik Bölümü
26. Liselerarası Matematik Yarışması
Ekip Final Yarışması Soru ve Cevapları
(9 Mayıs 2022)

SORU-1.

$\{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesinin birbirinden farklı a, b ve c elemanları için $3a - b - 2c$ ifadesinin en büyük değeri kaçtır?

Cevap:

$$3a - b - 2c \left. \begin{array}{l} a_{max} = 5 \\ c_{min} = 1 \end{array} \right\} 3 \cdot 5 - b - 2 \cdot 1 = 15 - b - 2 = 13 - b$$

$13 - b$ 'nin en büyük olması için $b = 2$ olur.

$$3a - b - 2c = 3 \cdot 5 - 2 - 2 \cdot 1 = 15 - 2 - 2 = 11$$

CEVAP: 11

SORU-2.

$\frac{\sqrt{4,44} + \sqrt{9,99}}{\sqrt{111}}$ işleminin sonucu a/b olduğuna göre, $a + b$ 'nin en küçük değeri kaçtır?

Cevap:

$$\frac{\sqrt{4,44} + \sqrt{9,99}}{\sqrt{111}} = \frac{\sqrt{\frac{444}{100}} + \sqrt{\frac{999}{100}}}{\sqrt{111}} = \frac{\sqrt{\frac{4 \times 111}{100}} + \sqrt{\frac{9 \times 111}{100}}}{\sqrt{111}}$$

$$= \frac{\frac{2\sqrt{111}}{10} + \frac{3\sqrt{111}}{10}}{\sqrt{111}} = \frac{\frac{5\sqrt{111}}{10}}{\sqrt{111}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$1 + 2 = 3$ olur.

CEVAP: 3

SORU-3.

x ve y doğal sayılar olmak üzere,

$$6(x!) = y^2 \text{ ve } x! + y = z$$

olduğuna göre, x 'in alabileceği en küçük değer için z kaçtır?

Cevap:

$$6x! = y^2 \Rightarrow x! = \frac{1}{6}y^2$$

$$y = 6 \text{ için } x! = 6 \Rightarrow x = 3 \text{ olur.}$$

ve

$$y = 6, x = 3 \text{ için de } 3! + 6 = z \Rightarrow z = 12 \text{ olur.}$$

CEVAP: 12

SORU-4.

$x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$(x^2 + 6xy + 9y^2)^2 + (3x + 6)^2 = 0$$

olduğuna göre, y kaçtır?

Cevap:

2 kare toplamının 0 olması için her parantezin içindeki ifadelerin ayrı ayrı 0 olması gerekir.

Buna göre,

$$3x + 6 = 0 \Rightarrow x = -2 \text{ olmalıdır.}$$

Diğer parantezin içindeki ifadeye x yerine $x = -2$ koyarsak,

$$(4 - 12y + 9y^2)^2 = 0$$

$$\Rightarrow 4 - 12y + 9y^2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$144 - 4(9)(4) = 144 - 144 = 0$$

$$\Rightarrow y_1 = -\frac{b}{2a}$$

$$y_1 = -\frac{-12}{18} = \frac{2}{3}$$

CEVAP: $\frac{2}{3}$

SORU-5.

Bir elektrik kurumu, abonelerinden kullandıkları ilk 250 kw elektriğin her bir kw'ı için sabit bir ücret ve 500 kw'a kadar olan (500 kw dahil) kullanım için öncekinden farklı ve yine sabit bir ücret almaktadır.

Buna göre, 300 kw elektrik kullanıldığında 400 TL, 450 kw elektrik kullanıldığında ise 850 TL ödeyen bir abone 500 kw elektrik kullandığında kaç TL öder?

Cevap:

500 kw elektrik kullanan abone ilk 250 kw lık kısmı için $250x$ TL, sonraki 250 kw için ise $(500 - 250)y$ TL ödemiş olsun. Buna göre, istenilen cevap $250(x + y)$ olmalıdır. x ve y değerlerini bulmak için aşağıdaki denklemleri kullanalım.

$$300 \text{ kw için, } 250x + (300 - 250)y = 400 \text{ TL}$$

$$450 \text{ kw için, } 250x + (450 - 250)y = 850 \text{ TL}$$

ise,

$$250x + 200y = 850$$

$$\underline{-250x - 50y = -400}$$

$$150y = 450 \Rightarrow y = 3$$

Elde edilen y değeri yukarıdaki denklemlerin herhangi birinde yerine konursa $x = 1$ olarak bulunur.

x ve y değerleri $250(x + y)$ ifadesinde yerine konursa cevap $250(1 + 3) = 1000$ TL olarak bulunur.

CEVAP: 1000

SORU-6.

a, b, c ve d gerçel sayılar olmak üzere,

$$\left(x - \frac{2}{x}\right)^3 = ax^3 + bx + \frac{c}{x} + \frac{d}{x^3}$$

olduğuna göre, $a + b + c + d$ toplamı kaçtır?

Cevap:

$$\left(x - \frac{2}{x}\right)^3 = ax^3 + bx + \frac{c}{x} + \frac{d}{x^3}$$

$x = 1$ olarak alırsak

$$\left(1 - \frac{2}{1}\right)^3 = a(1)^3 + b(1) + \frac{c}{1} + \frac{d}{(1)^3}$$

$$-1 = a + b + c + d$$

CEVAP: - 1

SORU-7.

x tam sayı olmak üzere,

$$||x| + x| - 2 < 0$$

eşitsizliğin çözüm kümesi nedir?

Cevap:

1. $x \geq 0$ için

$$|x + x| - 2 < 0$$

$$|2x| - 2 < 0$$

$$2x - 2 < 0$$

$$x < 1$$

Çözüm kümesi; $S_1 = \{x | 0 \leq x < 1\}$

2. $x < 0$ için

$$|-x + x| - 2 < 0$$

$$-2 < 0$$

Çözüm kümesi; $S_2 = \{x | x < 0\}$

Genel Çözüm; $S_g = S_1 \cup S_2$

$$S_g = \{x | x < 1\} \text{ veya } x \in (-\infty, 1)$$

CEVAP: $S_g = \{x | x < 1\}$ veya $x \in (-\infty, 1)$

SORU-8.

Aynı düzlemde alınan 4 farklı çember en fazla kaç noktada kesişir?

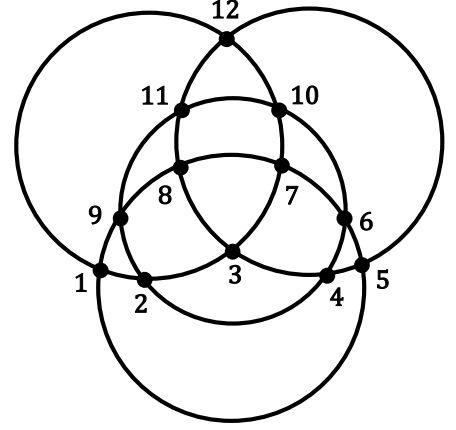
Cevap:

İki çemberin en fazla 2 ortak noktası olabilir.

4 farklı çember 2'li olarak

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{(4-2)! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$$

grup oluşturur.



Her bir grupta 2 kesişim olduğuna göre, $2 \cdot 6 = 12$ nokta oluşur.

CEVAP: 12

SORU-9.

x pozitif gerçel sayısı için

$$x - 2\sqrt{x} - 2 = 0$$

olduğuna göre, $\frac{x}{(x-2)^2}$ ifadesinin değeri kaçtır?

Cevap:

$$x - 2\sqrt{x} - 2 = 0 \Rightarrow x - 2 = 2\sqrt{x}$$

$\frac{x}{(x-2)^2}$ ifadesinde $(x - 2)$ yerine $2\sqrt{x}$ yazılırsa,

$$\frac{x}{(2\sqrt{x})^2} = \frac{x}{4x} = \frac{1}{4} \text{ olur.}$$

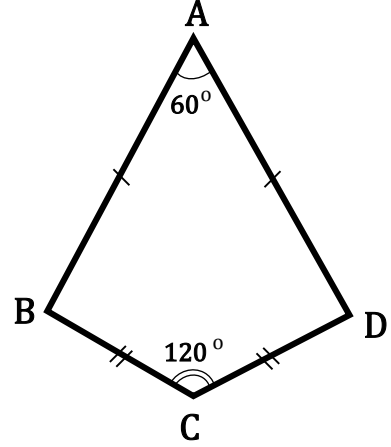
CEVAP: $\frac{1}{4}$

SORU-10.

$ABCD$ deltoidinde,

$s(\widehat{A}) = 60^\circ$ ve $s(\widehat{C}) = 120^\circ$ dir.

$\frac{|BC|}{|BA|}$ oranı nedir?

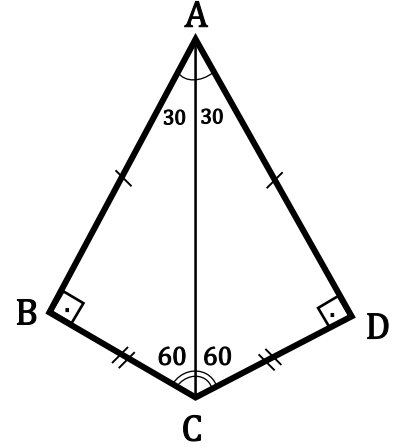


Cevap:

A ile C 'yi birleştiriniz. Deltoidin $[AC]$ köşegeni, şeklin simetri eksenidir. ABC üçgeninin açılarının ölçüleri $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ 'dir.

ABC üçgeninde

$$\frac{|BC|}{|BA|} = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ olur.}$$



CEVAP: $\frac{\sqrt{3}}{3}$

SORU-11.

$(x^3 + 2y)^n = \dots + a \cdot x^9 y^4 + \dots$ a gerçel tamsayısının değerini hesaplayınız.

Cevap:

$$\begin{aligned} a &= 2^4 \cdot \binom{7}{3} \\ &= 2^4 \cdot \frac{7!}{3! \cdot 4!} \\ &= 560 \end{aligned}$$

CEVAP: 560

SORU-12.

$$f(x) = 2x^3 - ax^2 + 3$$

fonksiyonunun gösterdiği eğrinin bir noktasındaki teğet doğrusunun denkleminin $y = 4$ olması için a sayısı kaç olmalıdır?

Cevap:

$$y = 4 \text{ doğrusunun eğimi} = 0$$

Teğet değme noktasında eğim (türev) sıfır olacağına göre,

$$f'(x) = 6x^2 - 2ax = 0 \quad \Rightarrow x = \frac{a}{3}$$

$$f\left(\frac{a}{3}\right) = 4 \text{ olmalıdır.}$$

$$2 \cdot \left(\frac{a}{3}\right)^3 - a \cdot \left(\frac{a}{3}\right)^2 + 3 = 4 \quad \Rightarrow \frac{2a^3}{27} - \frac{a^3}{9} = 1$$

$$\Rightarrow -\frac{a^3}{27} = 1$$

$$\Rightarrow a = -3$$

CEVAP: - 3

SORU-13.

$$\cos x \cdot \cos 2x = \frac{1}{16 \sin x}$$

olduğuna gore $\sin 4x$ kaçtır ?

Cevap:

$$\cos x \cdot \cos 2x = \frac{1}{16 \sin x} \text{ ise } \sin 4x ?$$

Her iki tarafı $\sin x$ ile çarpalım

$$\sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x = \frac{1}{16 \sin x} \cdot \sin x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \sin 2x \cdot \cos 2x = \frac{1}{16}$$

$$\Rightarrow \sin 2x \cdot \cos 2x = \frac{1}{8} \text{ olur.}$$

$$\left(\sin 2x \cdot \cos 2x = \frac{\sin 4x}{2} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \sin 4x = \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow \sin 4x = \frac{1}{4}$$

CEVAP: $\frac{1}{4}$

SORU-14.

$$\int_0^1 \frac{x}{(x^2 + 2)^3} dx \text{ belirli integralinin sonucu nedir?}$$

Cevap:

$$\int_0^1 \frac{x}{(x^2 + 2)^3} dx$$

$u = x^2 + 2$, $du = 2x dx$, uygulanırsa,

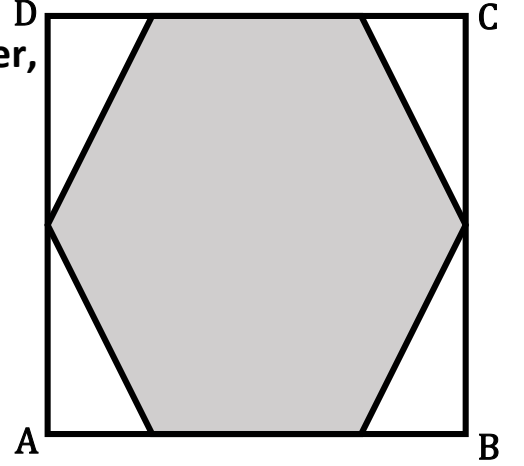
$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x}{(x^2 + 2)^3} dx &= \frac{1}{2} \int_2^3 \frac{1}{u^3} du \\ &= \frac{1}{2} \int_2^3 u^{-3} du = -\frac{1}{4} \left[\frac{1}{u^2} \right]_2^3 \\ &= -\frac{1}{4} \left[\frac{1}{9} - \frac{1}{4} \right] = \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{36} = \frac{5}{144} \end{aligned}$$

CEVAP: $\frac{5}{144}$

SORU-15.

Bir ABCD karesinin [AB] ve [CD] kenarları üçer, [BC] ve [AD] kenarları da ikişer eşit parçaya bölünmüştür.

Buna göre, $\frac{\text{Altıgenin alanı}}{\text{Karenin alanı}}$ oranı kaçtır?



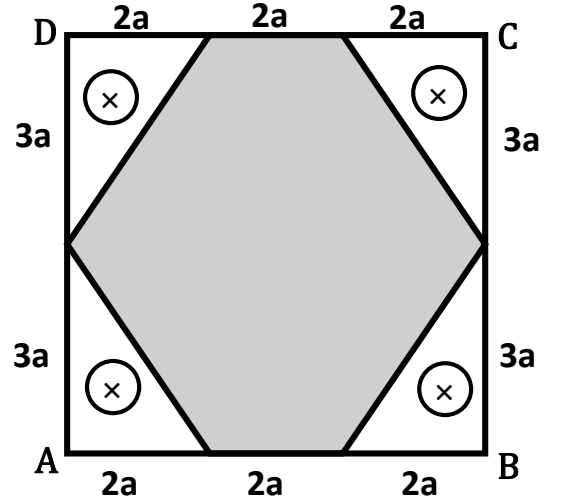
Cevap:

ABCD karesinin bir kenar uzunluğuna $6a$ dersek

$$\begin{aligned} A(\text{ABCD}) &= 6a \cdot 6a \\ &= 36a^2 \end{aligned}$$

Küçük üçgenler eş üçgenlerdir ve alanları birbirine eşittir. Buna göre dört üçgenin

$$\text{alanları toplamı} = 4 \cdot \frac{3a \cdot 2a}{2} = 12a^2$$



Altıgenlerin alanı = $A(\text{ABCD}) - 4$ üçgenin alanı

$$= 36a^2 - 12a^2 = 24a^2 \text{ dir.}$$

O halde $\frac{\text{Altıgenin alanı}}{\text{Karenin alanı}} = \frac{24a^2}{36a^2} = \frac{2}{3}$ olur.

CEVAP: $\frac{2}{3}$

SORU-16.

$a \in R^+$ olmak üzere,

$P(x) = x^2 + x + c$ ikinci dereceden gerçel katsayılı $P(x)$ polinomu için,

$$\int_{-1}^1 P(x) dx = P(a) - P(-a)$$

eşitliği sağlanmaktadır.

Buna göre, $a - c$ değeri kaçtır?

Cevap:

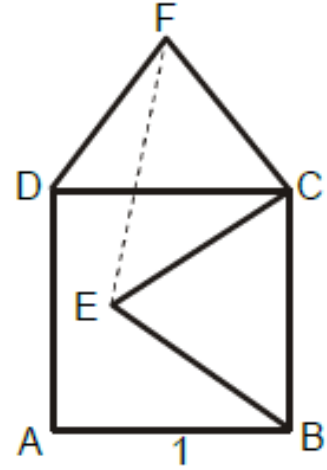
$$P(a) - P(-a) = a^2 + a + c - (a^2 - a + c) = 2a$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P(x) dx &= \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + cx \right)_{-1}^1 = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + c \right) - \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - c \right) \\ &= \frac{2}{3} + 2c = 2a \rightarrow \frac{2}{3} = 2(a - c) \rightarrow a - c = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

CEVAP: $\frac{1}{3}$

SORU-17.

Şekildeki birim karenin iki kenarı üzerine
BEC ve DFC eşkenar üçgenleri çizilmiştir.
Buna göre, $|EF|$ uzunluğu kaç birimdir?



Cevap:

BEC eşkenar üçgeninde, $|BC| = |EC| = 1$ br

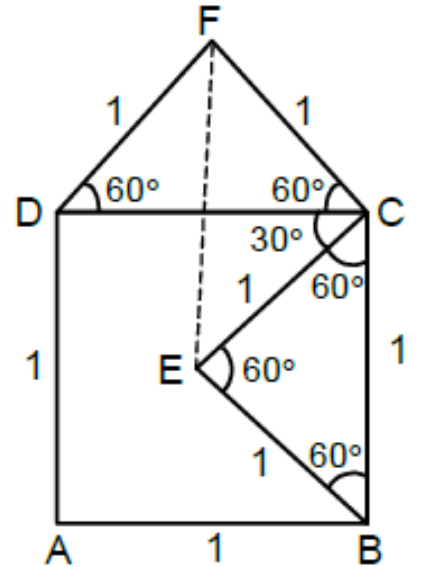
DFC eşkenar üçgeninde, $|DC| = |CF| = 1$ br

Şekilce FEC açısı 90° olduğu açıkça görülmektedir.

FEC dik üçgeninde pisagor teoreminden;

$$|EF|^2 = |EC|^2 + |CF|^2 \Rightarrow |EF|^2 = 2$$

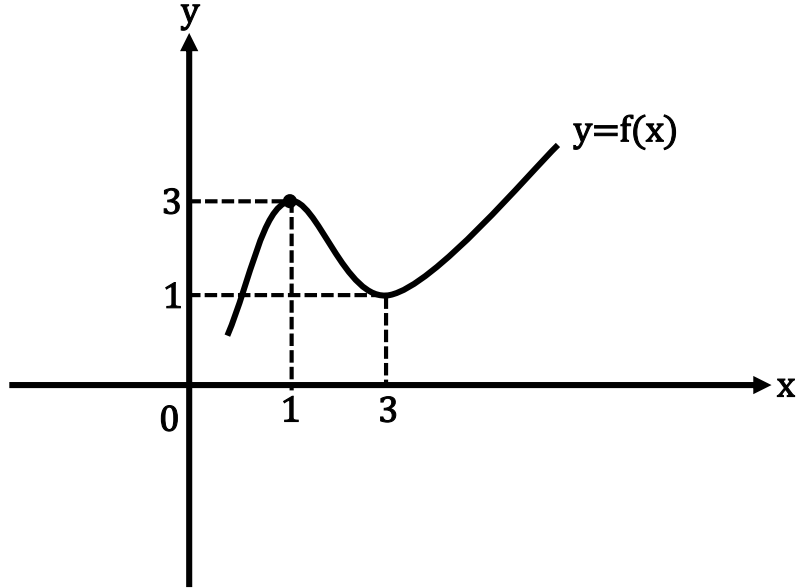
$$\Rightarrow |EF| = \sqrt{2} \text{ br bulunur.}$$



CEVAP: $\sqrt{2}$

SORU-18.

$y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği aşağıda veriliyor.



Buna göre,

$$\int_1^3 f'(x)(f(x))^3 dx, \text{ belirli integralinin sonucu nedir?}$$

Cevap:

$$\begin{aligned} \int f'(x)(f(x))^3 dx &= \int u^3 du = \frac{1}{4}u^4 \\ &= \frac{1}{4}(f(x))^4 \Big|_1^3 \\ &= \frac{1}{4}[(f(3))^4 - (f(1))^4] \\ &= \frac{1}{4}[1 - 81] \\ &= -\frac{80}{4} = -20 \end{aligned}$$

$$u = f(x)$$

$$du = f'(x) dx$$

CEVAP: - 20

SORU-19.

$$f(x) = x^2 - (m + 2)x + 2m$$

olmak üzere,

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$$

ise m kaçtır?

Cevap:

$$f(1) = 1 - (m + 2) + 2m = m - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{0}{0} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x) - 0}{1} = f'(2)$$

$$f'(x) = 2x - (m + 2) \quad \Rightarrow \quad f'(2) = 4 - (m + 2) = 2 - m$$

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \quad \Rightarrow \quad m - 1 = 2 - m$$

$$\Rightarrow 2m = 3 \rightarrow m = \frac{3}{2}$$

VEYA

$$f(x) = (x - m)(x - 2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - m) - (x - 2)}{x - 2} = 2 - m$$

$$f(1) = m - 1$$

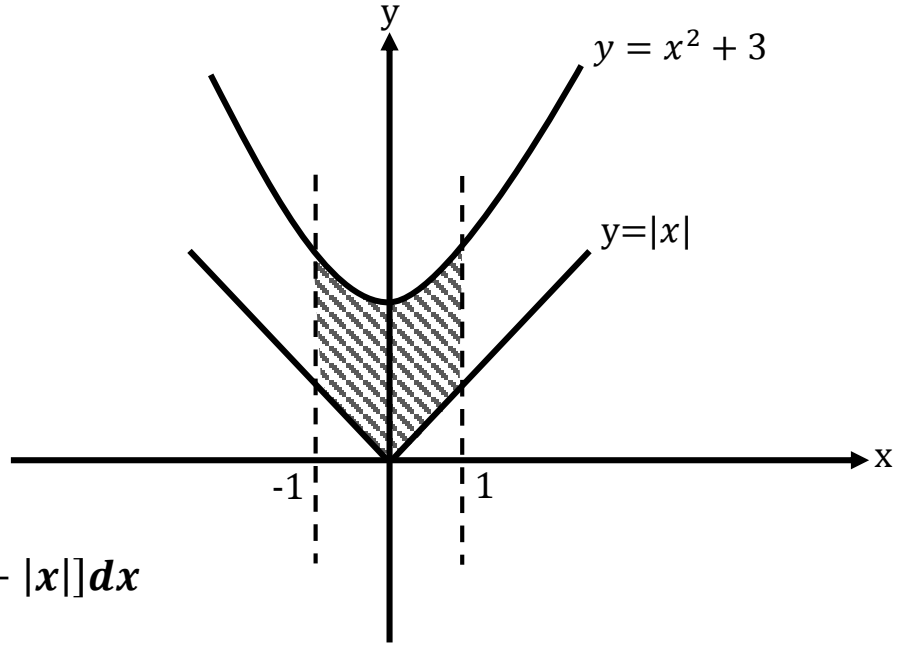
$$2 - m = m - 1 \Rightarrow 2m = 3 \rightarrow m = \frac{3}{2}$$

CEVAP: $\frac{3}{2}$

SORU-20.

Sınırları $y = x^2 + 3$ ve $y = |x|$ eğrileri ile $x = -1$ ve $x = 1$ doğruları olan bölgenin alanı kaç birim karedir?

Cevap:



$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^1 [(x^2 + 3) - |x|] dx \\ &= \int_{-1}^0 [(x^2 + 3) + x] dx + \int_0^1 [(x^2 + 3) + (-x)] dx \\ &= \left(\frac{x^3}{3} + 3x + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-1}^0 + \left(\frac{x^3}{3} + 3x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 \\ &= -2 \left(-\frac{1}{3} - 3 + \frac{1}{2} \right) = \frac{17}{3} \text{ br}^2 \end{aligned}$$

CEVAP: $\frac{17}{3}$

YEDEK SORULAR

SORU-21.

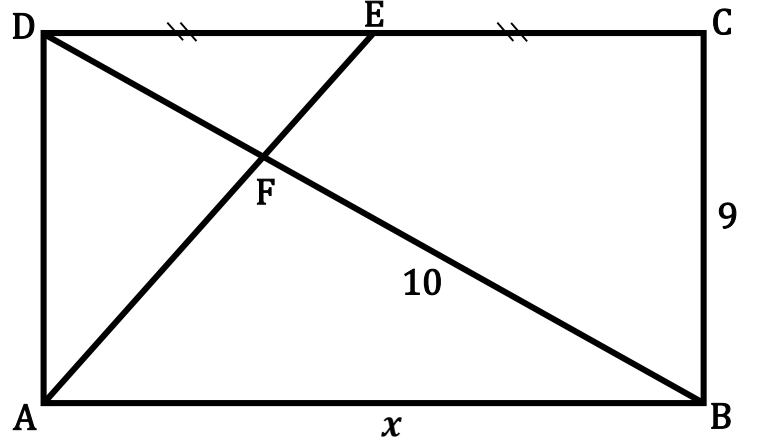
ABCD bir dikdörtgen

$$|DE| = |EC|$$

$$|BC| = 9 \text{ cm}$$

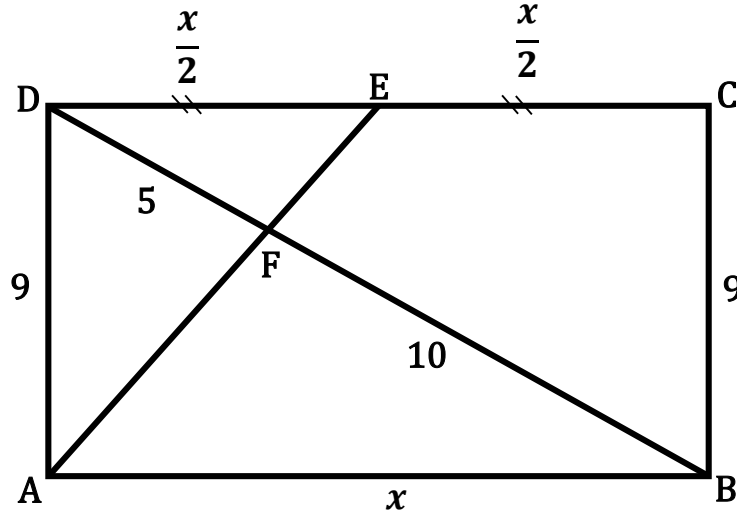
$$|FB| = 10 \text{ cm}$$

$$|AB| = x$$



Yukarıdaki verilere göre, x kaç cm'dir?

Cevap:



ABCD dikdörtgeninde, DEF ve BAF üçgenlerinin benzerliğinden

$$\frac{|DE|}{|AB|} = \frac{|DF|}{|FB|} \Rightarrow \frac{\frac{x}{2}}{x} = \frac{|DF|}{10} \Rightarrow |DF| = 5 \text{ cm'dir.}$$

ABD dik üçgeninde, Pisagor bağıntısından;

$$x^2 + 9^2 = 15^2 \Rightarrow x^2 = 144 \Rightarrow x = 12 \text{ cm olur.}$$

CEVAP: 12

SORU-22.

5, 6, 7, 8, 9 rakamlarını kullanarak rakamları birbirinden farklı olan, üç basamaklı ve 780'den küçük kaç değişik sayı yazılabilir?

Cevap:

Sayı 780'den küçük olacağına göre, yüzler basamağına 7 yazarsak, onlar basamağına 5 veya 6 yı, birler basamağına ise geriye kalan 3 sayıdan birini yazabiliriz. Bu durumda $1.2.3 = 6$ sayı yazılabilir.

Eğer yüzler basamağı 5 veya 6 alınır, onlar basamağına 4, birler basamağına ise 3 sayı yazılabilir. Bu durumda, $2.4.3 = 24$ sayı yazılabilir.

Toplam $6 + 24 = 30$ sayı yazılabilir.

CEVAP: 30

SORU-23.

$$\int_{-1}^0 |2x|(x^2 + 1)^2 dx$$

belirli integralinin sonucu kaçtır?

Cevap:

$x \in (-1, 0)$ olduğuna göre, $|2x| = -2x$ olur.

$$\int_{-1}^0 -2x(x^2 + 1)^2 dx = - \int_{\frac{1}{2}}^1 u^2 du$$

$$u = x^2 + 1$$

$$du = 2x dx$$

$$x = -1 \rightarrow u = 2$$

$$x = 0 \rightarrow u = 1$$

$$= \int_1^2 u^2 du$$

$$= \frac{1}{3} u^3 \Big|_1^2$$

$$= \frac{1}{3} (8 - 1)$$

$$= \frac{7}{3}$$

CEVAP: $\frac{7}{3}$

SORU-24

$$f(x) = x^2 + ax + 6$$

parabolünün x eksenini kestiği noktalardan çizilen teğetler birbirine dik ise $a > 0$ kaçtır?

Cevap:

$$f'(x) = 2x + a$$

Parabolün x eksenini kestiği noktalar x_1 ve x_2 olsun.

Teğetlerin eğimleri:

$$m_1 = 2x_1 + a \text{ ve } m_2 = 2x_2 + a$$

Teğetler dik olduğundan, $m_1 \cdot m_2 = -1$ olmalıdır.

$$\begin{aligned} m_1 \cdot m_2 &= (2x_1 + a)(2x_2 + a) \\ &= 4x_1x_2 + 2a(x_1 + x_2) + a^2 \\ &= 4(6) - 2a(a) + a^2 = -1 \end{aligned}$$

$$a^2 = 25 \text{ ve } a = 5 \text{ olur.}$$

CEVAP: 5

SORU-25.

U kümesi, 1, 2, 3, 4 rakamları kullanılarak oluşturulan ve rakamları birbirinden farklı olan dört basamaklı bütün doğal sayıların kümesidir. U'nun elemelerinden 4 rakamı 1 rakamının solunda olanlar A kümesini, 4 rakamı 2 rakamının sağında olanlar B kümesini oluşturuyor.

Buna göre, $A \cup B$ kümesinin eleman sayısı kaçtır?

Cevap:

$$U = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\Rightarrow \text{Rakamları birbirinden farklı olan dört basamaklı sayıların sayısı} \\ = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

$$s(A) + s(B) = 24 \Rightarrow s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$$

$$A \cap B = \{3241, 2413, 2341, 2431\} \text{ olduğuna göre,}$$

$$s(A \cup B) = 24 - 4 = 20 \text{ elde edilir.}$$

CEVAP: 20